INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Engenharia Civil/Mecatrônica
Estatística e Probabilidade
Aula 5

Prof. Guilherme Sada Ramos

Instituto Federal de Santa Catarina/ Câmpus Criciúma

15 de abril de 2021

Probabilidade empírica ou estatística

Observando o resultado de um experimento aleatório repetido um número n grande de vezes, definimos a probabilidade empírica de um evento E como sendo

$$p(E) = \frac{\text{frequência do evento E}}{\text{frequência total}}$$

Lei dos grandes números

Conforme um experimento é repetido várias vezes, a probabilidade empírica de um evento se aproxima da sua probabilidade teórica (real).

Tópicos em probabilidade

Definimos em um espaço amostral Ω:

- $A \cup B$: ocorrência do evento A **ou** do evento B;
- $A \cap B$: ocorrência do evento A **e** do evento B;
- $A - B$; ocorrência do evento A **e não** ocorrência do evento B.

De acordo com a teoria dos conjuntos deduzimos que:

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$
- $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$
- $p(A - B) = p(A \cup B) - p(B)$

Exemplo: Uma urna contém exatamente 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se ao acaso uma bola da urna. Qual a probabilidade de se obter uma bola com um número múltiplo de 2 ou 3?

$$p(M2) = \frac{10}{20} \quad p(M3) = \frac{6}{20} \quad p(M2 \cap M3) = \frac{3}{20}$$

$$p(M2 \cup M3) = p(M2) + p(M3) - p(M2 \cap M3)$$

$$p(M2 \cup M3) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 65\%$$

Exemplo: Em uma fábrica, 60% dos funcionários conseguem produzir uma peça A, 70% conseguem produzir uma peça B e 40% produzem as duas peças. Determine qual a probabilidade de um funcionário:

a) produzir pelo menos uma das duas peças;
b) produzir somente a peça A;
c) produzir somente a peça B.

$p(A) = 0,6 \quad p(B) = 0,7 \quad p(A \cap B) = 0,4$

a) $p(A \cup B) = 0,6 + 0,7 - 0,4 = 0,9 = 90\%$
b) $p(A - B) = 0,6 - 0,4 = 0,2 = 20\%$
c) $p(B - A) = 0,7 - 0,4 = 0,3 = 30\%$

Casos especiais e importantes:

Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os eventos A e B são <u>mutuamente exclusivos</u>. Neste caso,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

<u>Exemplo</u>: Em uma rótula de uma via, um motorista pode seguir em frente, virar à esquerda, ou virar à direita. Se 50% dos motoristas vão em frente e 30% dos motoristas dobram à esquerda, então qual é a probabilidade de um motorista selecionado ao acaso seguir à frente ou virar à esquerda?

Não é possível o motorista, virar à esquerda e seguir em frente ao mesmo tempo, logo $F \cap E = \emptyset$. Portanto:

$$p(F \cup E) = p(F) + p(E) = 0,5 + 0,3 = 0,8 = 80\%$$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos e $A \cup B = \Omega$, dizemos que A e B são <u>eventos complementares</u>. Denota-se, neste caso, $B = A^C$ (evento complementar de A).

$$p(A^C) = 1 - p(A)$$

<u>Exemplo</u>: No lançamento de 6 moedas, qual é a probabilidade de ocorrer mais de 1 coroa?

A: ocorrência de mais de 1 coroa
A^C: não ocorrência de mais de 1 coroa (ocorrência de, no máximo, 1 coroa)

$p(A^C) = \dfrac{7}{64}$

$p(A) = 1 - \dfrac{7}{64} = \dfrac{57}{64} \approx 89,06\%$

Exemplo: Depois de um longo período de testes, verificou-se que o procedimento A de recuperação de informação corre um risco de 2% de não oferecer resultado satisfatório. No procedimento B, o risco cai para 1%. O risco de ambos os procedimentos apresentarem resposta insatisfatória é de 0,5%. Qual é a probabilidade de os dois apresentarem resposta satisfatória?

$p(F_A) = 0,02 \quad p(F_B) = 0,01 \quad p(F_A \cap F_B) = 0,005$

$p(F_A \cup F_B) = p(F_A) + p(F_B) - p(F_A \cap F_B) =$
$0,02 + 0,01 - 0,005 = 0,025 = 2,5\%$

$\neg F_A \cap \neg F_B = (F_A \cup F_B)^C$
$p(\neg F_A \cap \neg F_B) = 1 - p(F_A \cup F_B) = 1 - 0,025 = 0,975 = 97,5\%$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Probabilidade condicional

Sejam dois eventos A e B em um espaço amostral Ω. A probabilidade da ocorrência de A *uma vez ocorrido o evento B* é chamada de
probabilidade condicional de A dada a ocorrência de B, denotada por $p(A/B)$.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

OBS.: Podemos considerar que, ao se calcular a probabilidade condicional $p(A/B)$, estamos considerando a ocorrência do evento A *tendo como novo espaço amostral o evento B*.

Exemplo: Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho normal (sem reposição). Qual a probabilidade de que a segunda carta seja uma dama, dado que a primeira seja um rei?

Se a primeira carta é um rei, sobram 51 cartas, das quais temos 4 damas... $p = \frac{4}{51}$. Pela fórmula, temos:

R_1: sair um rei na primeira carta $\Rightarrow p(R_1) = \frac{4}{52}$
D: sair uma dama $\Rightarrow p(D \cap R_1) = \frac{16}{52 \times 51}$

$$p(D/R_1) = \frac{p(D \cap R_1)}{p(R_1)} = \frac{\frac{16}{2652}}{\frac{4}{52}} = \frac{4}{51}$$

Exemplo: Componentes complexos são montados em uma fábrica que usa duas linhas de montagem diferentes: A e A'. A linha A usa equipamentos mais antigos que A', de forma que é mais lenta e um pouco menos confiável. Suponha que, em uma média diária, a linha A monte 8 componentes, sendo 2 deles defeituosos e 6 não defeituosos. Já a linha A' produz 1 defeituoso e 9 não defeituosos. Qual a probabilidade de um determinado componente selecionado ao acaso ser produzido pela linha A, considerando que ele tem defeito?

$p(A) = \frac{8}{18} \quad p(A') = \frac{10}{18} \quad p(D) = \frac{3}{18} \quad p(\neg D) = \frac{15}{18}$

$$p(A/D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{3}{18}} = \frac{2}{3}$$

Eventos independentes

Temos $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, ou seja, $p(A \cap B) = p(A/B).p(B)$.

Dois eventos A e B são ditos independentes quando a ocorrência (ou não) de um deles *não interfere na probabilidade de ocorrência do outro*.

$$p(A/B) = p(A) \qquad\qquad p(B/A) = p(B)$$

Neste caso, deduzimos que

$$P(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Exemplo: João gosta de jogar xadrez contra o computador e tem $\frac{1}{4}$ de chance de ganhar. Já Pedro também vai enfrentar o adversário virtual e tem $\frac{2}{5}$ de chance de vencer. Cada um vai jogar uma partida no computador. Qual é a chance de os dois vencerem?

Resultado de um não interfere nas chances do outro...

$$p(J \cap P) = p(J).p(P) = \frac{1}{4}.\frac{2}{5} = \frac{1}{10} = 10\%$$

INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Exemplo: Frequentemente, chega à determinada instalação de inspeção um lote de componentes enviado por dois fornecedores, 1 e 2. Oitenta por cento de todos os lotes que vêm do fornecedor 1 passam na inspeção, assim como 90% dos lotes do fornecedor 2. Qual é a probabilidade de, uma vez vindo lotes dos dois fornecedores, ambos passarem na inspeção?

Resultado de uma inspeção não afeta as probabilidades da outra inspeção...

$$p(L_1 \cap L_2) = p(L_1).p(L_2) = 0,8.0,9 = 0,72 = 72\%$$